ECUAȚII DIFERENȚIALE ȘI CU DERIVATE PARȚIALE

Suport de curs și seminar

Cuprins

1. Ecuații diferențiale de ordinul 1 3
1.1. Ecuaţii cu variabile separabile 3
1.2. Ecuaţii diferenţiale omogene 5
1.3. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1 7
1.4. Ecuaţii de tip Bernoulli 9
1.5. Ecuaţii de tip Riccati 11
1.6. Ecuaţii cu diferenţială totală exactă 12
1.7. Ecuaţii implicite 15
2. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior 19
2.1. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior integrabile prin cuadraturi 19
2.2. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior care admit reducerea ordinului 21
2.3. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior liniare 24
2.4. Ecuaţii diferenţiale de tip Euler 30
3. Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare 32
4. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi 36
4.1. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare şi omogene 37
4.2. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniare 38
Bibliografie 42

1. Ecuații diferențiale de ordinul 1

1.1. Ecuaţii cu variabile separabile

Numim astfel ecuaţiile de forma:

$$\mathbf{x' = f(t)g(t)}, \qquad t \in I \qquad (1)$$

unde $f \in C(I)$; $g \in C(J, R^*)$ iar I, J intervale în R.

Ecuaţia (1) e echivalentă cu ecuaţia: $\frac{x'}{g(x)} = f(t)$ sau ţinând cont că $x' = \frac{dx}{dt}$ putem scrie

$\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$.

Integrând de la t_o la t (cu $t_o \in I$ oarecare) obţinem:

$$\int_{x(t_o)}^{x(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_o}^{t} f(s)ds \qquad , t \in I \qquad (2)$$

Să notăm $G(x) = \int_{x_o}^{x} \frac{du}{g(u)}$, $x \in]a, b[\subset R$, unde $x_o = x(t_o)$.

Cum G e continuă şi monotonă aceleaşi proprietăţi le are şi G^{-1}. Cu aceste notaţii ecuaţia (2) se scrie:

$$G(x(t)) = \int_{t_o}^{t} f(s)ds \quad \text{sau} \quad x(t) = G^{-1}(\int_{t_o}^{t} f(s)ds), \ t \in I \qquad (3)$$

Formula (3) dă expresia soluţiei ecuaţiei (1) ce satisface condiţia Cauchy $x(t_o) = x_o$.

Şi reciproc, funcţia x definită de (3) este continuă, cu derivata continuă pe I şi $x'(t) = \frac{f(t)}{G©(x)} = f(t)g(x)$. Evident x(t) e definită doar pentru acele valori ale lui t pentru care $\int_{t_o}^{t} f(s)ds$ se află în domeniul funcţiei G^{-1}.

Probleme rezolvate

1. Să se afle toate soluţiile ecuaţiei:

$$x' = \frac{x - 1}{t} \qquad , t \in]0, +\infty [\qquad (4)$$

Rezolvare: Să observăm că pentru x: $]0, \infty [\to R$, $x \neq 1$; Atunci ecuaţia dată e echivalentă cu:

$$\frac{dx}{x - 1} = \frac{dt}{t} \Leftrightarrow \int_{x_o}^{x} \frac{du}{u - 1} = \int_{t_o}^{t} \frac{ds}{s}$$

unde $x(t_o) = x_o$ iar $t_o \in] 0, +\infty [$.

$$\ln|u-1|\Big|_{x_o}^{x(t)} = \ln|s|\Big|_{t_o}^{t} \Leftrightarrow \ln|x(t)-1| - \ln|x_o-1| = \ln|t| - \ln|t_o| \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x(t)-1}{t}\right| = \ln\left|\frac{x_o-1}{t_o}\right|$$

Să notăm $c = \left|\frac{x_o-1}{t_o}\right|$ şi atunci $\left|\frac{x(t)-1}{t}\right| = c$, $t\in]0, \infty[$

Rezultă $x(t) = ct + 1$, $t\in]0, \infty[$. ($c\in R^*$ arbitrar) (căci $\frac{x(t)-1}{t}$ are valoare constantă pe $]0, \infty[$).

Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiilor (4) este:

$S = \{x(t)=ct+1, t\in]0, \infty[/ c\in R^*\}\cup\{x(t)=1, t\in]0, \infty[\}$ sau

$S=\{x(t)=ct+1, t\in]0, \infty[/ c\in R\}$

2. Să se afle toate soluţiile ecuaţiei:

$$txdt + (t-1)dx = 0 \qquad (5)$$

Rezolvare: A integra o asemenea ecuaţie înseamnă a găsi atât funcţiile $x = x(t)$ cât şi funcţiile $t = t(x)$ care satisfac ecuaţia. Să observăm că $x(t) = 0$, $t\in R$ şi $t(x) = 1$, $x\in R$ satisfac ecuaţia şi sunt soluţii ale sale.

Pentru $x \neq 0$ şi $t \neq 1$ obţinem: $\frac{dx}{x} = -\frac{t}{t-1}dt$

În continuare vom evita discuţiile amănunţite asupra intervalelor de integrare şi vom lucra cu primitivele celor două funcţii pe intervalele pe care au sens:

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{t}{t-1}dt \Leftrightarrow \ln|x| = -t - \ln|t-1| + c_1$$

$$\Leftrightarrow \ln|x|\,e^{-t}|t-1| = c_1,\ c_1\in R \Leftrightarrow x\,e^{-t}|t-1| = c,\ c\in R^*$$

În concluzie ecuaţia are soluţiile: $x\,e^{-t}|t-1| = c,\ c\in R$

(căci soluţiile $x(t)=0$ şi $t(x)=1$ sunt înglobate acum în expresia anterioară, corespunzător cazului $c=0$).

Probleme propuse

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii şi probleme asociate unor ecuaţii diferenţiale:

a) $x' = 2t(1+x^2)$

b) $(t^2-1)x' + 2tx^2 = 0$

c) $txdt + (2t-1)dx = 0$

d) $2t(x+1)dt + (t^2-4)(x-1)dx = 0$

e) $\begin{cases} x' = 1+x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

g) $3x^2x' = t(x^3-1)$

h) $x'tgt - x = 0$

i) $tdx - xdt = x^2dt$

j) $tx' = x + x^3$

k) $a(tx' + 2x) = txx'$

f) $x' = \frac{2}{t^3 \sin x}$ l) $\begin{cases} x' \sin t - x \ln x = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

1.2. Ecuaţii diferenţiale omogene

O ecuaţie de forma **x'= f(t, x)** se numeşte *omogenă în sensul lui Euler* dacă f e o funcţie omogenă de grad zero (ceea ce înseamnă că $f(\lambda t, \lambda x)=f(t, x)$, $\forall (t, x) \in Dom\ f$ şi $\forall \lambda \in R$). O ecuaţie diferenţială omogenă se poate scrie sub forma:

$$x(t) = h\left(\frac{x}{t}\right) \qquad (6)$$

$h \in C(I, R)$, unde I este astfel încât $0 \notin I$ şi $h(u) \neq u$, $\forall u \in I$.

Prin substituţia $z(t) = \frac{x(t)}{t}$ ecuaţia (6) se reduce la o ecuaţie cu variabilele separabile de forma $z' = \frac{h(z) - z}{t}$.

În cazul special al ecuaţiei $x' = f\left(\frac{at + bx + c}{a_1 t + b_1 x + c_1}\right)$ (7)

unde a, b, c, a_1, b_1, $c_1 \in R$; $f \in C(I)$ şi $I \subset R$ interval, distingem două cazuri:

a) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$. Atunci prin substituţiile: $\begin{cases} s = t - t_o \\ u = x - x_o \end{cases}$ (unde (t_o, x_o) este unica soluţie a sistemului algebric $\begin{cases} at_o + bx_o = -c \\ a_1 t_o + b_1 x_o = -c_1 \end{cases}$), ecuaţia (7) se reduce la o ecuaţie omogenă în sensul lui Euler de forma:

$$u'(s) = f\left(\frac{as + bu}{a_1 s + b_1 u}\right) \quad \text{sau} \quad u' = f\left(\frac{a + b\frac{u}{s}}{a_1 + b_1 \frac{u}{s}}\right)$$

b) $\Delta = 0$ atunci prin substituţia $z(t) = at + bx(t)$ se obţine o ecuaţie cu variabile separabile.

Observaţie: 1) O ecuaţie de forma $A(t, x)x' + B(t, x) = 0$ unde A şi B sunt funcţii omogene de acelaşi grad este echivalentă cu o ecuaţie omogenă în sens Euler.

2) Unele ecuaţii pot fi aduse la forma omogenă în sens Euler prin substituţia $x = u^{\alpha}$. Se află $\alpha \in R$ astfel încât ecuaţia să devină omogenă de grad zero.

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve ecuaţia $2t^2x'=t^2+x^2$, $t\in]0, \infty[$

Rezolvare: Ecuaţia este echivalentă cu: $x'=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{x}{t}\right)^2\right]$. Se observă că ea este omogenă în sensul lui Euler ($h(u)=\frac{1}{2}\left(1+u^2\right)$).

Cercetăm dacă $h(u)=u \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1+u^2\right)=u \Leftrightarrow u^2-2u+1=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (u-1)^2=0 \Leftrightarrow u=1 \Rightarrow \frac{x}{t}=1 \Rightarrow x(t)=t,\ t\in]0, \infty[.$$

Se verifică uşor că $x(t) = t$, $t\in]0, \infty[$ e soluţie a ecuaţiei date. În continuare considerăm $u\neq 1$.

Facem schimbarea de variabilă $\frac{x}{t}=z \Rightarrow x = t\cdot z(t)$. Înlocuind pe x şi x' în ecuaţie obţinem:

$$z+tz'=\frac{1}{2}\left(1+z^2\right) \Leftrightarrow 2tz'=(z-1)^2.$$

Am obţinut o ecuaţie cu variabilele separabile în variabilele t şi z(t). Obţinem:

$$2t\frac{dz}{dt}=(z-1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{(z-1)^2}dz=\frac{1}{2t}dt;\ \text{(evident } z\neq 1 \text{ căci } x\neq t)$$

Prin integrare

$$\int\frac{1}{(z-1)^2}dz=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt \Leftrightarrow \frac{-1}{z-1}=\frac{1}{2}\ln|t|+\ln|c|,\ c\in R^*$$

$$\Leftrightarrow z=1-\frac{2}{\ln|ct|};\ c\in R^* \Rightarrow x(t)=t-\frac{2t}{\ln|ct|};\ c\in R^* \text{ şi în plus } x(t)=1,\ t\in]0, \infty[.$$

2. Să se rezolve ecuaţia $x'=\frac{2t-x}{t+2x-5}$; $t\in]1, \infty[$

Rezolvare: Considerăm sistemul: $\begin{cases}2t_o-x_o=0\\ t_o+2x_o-5=0\end{cases}$. El are soluţia unică $(t_o,x_o)=(1, 2)$. Facem schimbarea de variabile: $\begin{cases}s=t-t_o\\ u=x-x_o\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}s=t-1\\ u=x-2\end{cases}$

şi obţinem $x'=(u+2)'=u'$. Rezultă:

$$u'=\frac{2(s+1)-(u+2)}{s+1+2(u+2)-5} \Leftrightarrow u'=\frac{2s-u}{s+2u} \Leftrightarrow u'=\frac{2-\frac{u}{s}}{1+2\frac{u}{s}}.$$

Am obţinut o ecuaţie omogenă în sensul lui Euler în variabilele s şi u(s).

Facem schimbarea de variabilă $\frac{u}{s}=z(s) \Rightarrow u=s\cdot z(s) \Rightarrow u'(s)=z(s)+sz'(s)$.

După înlocuiri şi calcule avem:

$$z+s\cdot z'=\frac{2-z}{1+2z} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2z+1}{2(z^2+z-1)}dz=\frac{1}{s}ds$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{2z+1}{z^2+z-1}dz=\int\frac{1}{s}ds \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln\left|z^2+z-1\right|=\ln|cs| \; ; \; c\in R$$

$$\Rightarrow \quad z^2+z-1=\frac{1}{c^2s^2} \quad \Rightarrow \quad s^2(z^2+z-1)=\frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \quad s^2\left(\frac{u^2}{s^2}+\frac{u}{s}-1\right)=c_1 \quad \Leftrightarrow \quad u^2+us-s^2=c_1 \; , \; c_1>0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+(x-2)(t-1)-(t-1)^2=c_1 \; ; \; c_1\in R_+^{*}.$$

Aceasta reprezintă familia soluţiilor ecuaţiei date (în formă implicită).

Probleme propuse

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii şi probleme asociate unor ecuaţii omogene în sens Euler:

a) $tx'=x-te^{\frac{x}{t}}$

b) $(2t-3x)dt+(2x-3t)dx=0$

c) $(x-t+2)x'+t-x-1=0$

d) $x'=\frac{x}{t}+tg\frac{x}{t}$

e) $\begin{cases}\left(1+e^{\frac{t}{x}}\right)dx+e^{\frac{t}{x}}\left(1-\frac{t}{x}\right)dy=0\\ x(1)=1\end{cases}$

f) $tx'-x=(t+x)\ln\frac{t+x}{t}$

g) $tx'=x+\sqrt{x^2-t^2}$

h) $(x+t-2)dt+(t-x+4)=0$

i) $t^3(x'-t)=x^2$

j) $\begin{cases}(x^2-3t^2)dt+2txdx=0\\ x(0)=1\end{cases}$

(Indicaţie pentru ecuaţia i): se face substituţia $x=u^{\alpha}$ şi se determină $\alpha\in R$ astfel încât ecuaţia dată să fie omogenă în sens Euler. Se obţine $\alpha=2$)

1.3. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1

Forma generală a unor astfel de ecuaţii este:

$$\mathbf{x'-a(t)x=b(t)} \qquad (8)$$

unde $a, b:]t_1, t_2[\subset R\to R$ sunt funcţii continue.

Considerăm ecuaţia omogenă asociată:

$$x'-a(t)x = 0 \qquad (9)$$

Ecuaţia (9) este o ecuaţie cu variabile separabile. Mulţimea soluţiilor ei este dată de:

$$x(t) = c \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \; c \in R.$$

Notăm cu S_o mulţimea soluţiilor ecuaţiei (9) şi cu S mulţimea soluţiilor ecuaţiei (8). Se ştie că: $S = S_o+\{x_p\}$, unde x_p este o soluţie particulară a ecuaţiei (8).

Pentru determinarea lui x_p aplicăm metoda variaţiei constantei lui Lagrange: căutăm x_p sub forma: $x_p(t) = \varphi(t) \cdot e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds}$

Înlocuind în ecuaţia (8) avem:

$$\varphi'(t) \cdot e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} + \varphi(t) \cdot a(t) \cdot e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} - a(t) \cdot \varphi(t) \cdot e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} = b(t) \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(t) = b(t) \cdot e^{-\int_{t_o}^{t} a(s)ds} \quad \text{şi astfel} \quad \varphi(t) = \int_{t_o}^{t} b(s) \cdot e^{-\int_{t_o}^{s} a(t)dt}$$

În consecinţă am obţinut: $x_p = e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} \cdot \int_{t_o}^{t} b(s) \cdot e^{-\int_{t_o}^{t} a(t)dt} ds$

Astfel, $S=\left\{ c \cdot e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} + e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} \cdot \int_{t_o}^{t} b(s) \cdot e^{\int_{t_o}^{t} a(t)dt} ds \,\middle|\, t \in]t_1, t_2[, c \in R \right\}$

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve ecuaţia $x'+ x \cdot tgt = \frac{1}{cost}$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Rezolvare: Considerăm ecuaţia omogenă asociată: $x'+ x \cdot tgt = 0$. Rezolvând-o ca o ecuaţie cu variabile separabile obţinem:

$$\frac{1}{x}dx = -tgt\, dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{x}dx = -\int tgt\, dt \Leftrightarrow \quad \ln|x| = \ln|cost| + \ln|c| \;, \; c \in R^*$$

Mulţimea soluţiilor ei este: $x(t)= c \cdot cost$; $c \in R$, adică

$$S_o=\{c \cdot cost \,/\, c \in R\}$$

Caut $x_p(t)=\varphi(t) \cdot cost$. Prin înlocuirea în ecuaţia neomogenă avem:

$$\varphi'(t) \cdot cost - \varphi(t) \cdot sint + \varphi(t) \cdot cost \cdot tgt = \frac{1}{cost}$$

$$\varphi\copyright(t)=\frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow \qquad \varphi(t)=\operatorname{tg}t \text{ , deci } x_p=\sin t.$$

Astfel, $S=\left\{c\cdot\cos t+\sin t, t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\;\middle|\; c\in R\right\}$.

2. Să se rezolve ecuația: $(\sin^2 x + t\cdot\operatorname{ctg}x)x'=1$.

Rezolvare: Se observă că ecuaţia e neliniară în raport cu x. Dar prin înmulţire cu $\frac{dt}{dx}$ obţinem:

$$\sin^2 x+t\cdot\operatorname{ctg}x=\frac{dt}{dx} \text{ sau } t'(x) - t\cdot\operatorname{ctg}x = \sin^2 x$$

Ecuaţia este liniară în raport cu t. Se obţine prin integrarea indicată mai sus familia soluţiilor (în formă implicită).

$$S=\{t(x) = c\cdot\sin x-\sin x\cdot\cos x,\ x\in]\,k\pi,(k+1)\pi\,[,\ k\in Z\ /\ c\in R\}$$

Probleme propuse

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii şi probleme asociate unor ecuaţii diferenţiale liniare:

a) $x'+\frac{2}{t}x=t^3,\ t\in]0,\infty[$

b) $x'-2tx=t-t^3,\ t\in R$

c) $x'-\frac{2t-1}{t^2}x=1,\ t\in]1,\infty[$

d) $\begin{cases} tx'+x=e^t \\ x(a)=b \end{cases},\ t\in[a,\infty[$

e) $e^x dt+(t\cdot e^x-2x)dx=0$

f) $(2\cdot e^x-t)\cdot x'=1$

g) $\begin{cases} x'\sin t-x\cdot\cos t=-\frac{\sin^2 t}{t^2},\ t>0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x'-2tx=\cos t-2t\cdot\sin t,\ t\in R \\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t)<\infty \end{cases}$

i) $\begin{cases} t^2x'\cos\frac{1}{t}-x\sin\frac{1}{t}=-1 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0 \end{cases}$

2. Să se arate că ecuaţia $x'-(1+\cos t)x=-\cos^2 t$ are o unică soluţie periodică.

1.4. Ecuaţii de tip Bernoulli

Sunt ecuaţii de forma: $\mathbf{x'=a(t)x+b(t)x^{\alpha}}$ (10)

unde a, b:$]t_1, t_2[\subset R\to R$ sunt funcţii continue iar $\alpha\in R\setminus\{0,1\}$.

(Evident cazurile $\alpha=0$, $\alpha=1$ corespund ecuaţiilor liniare, respectiv celor cu variabile separabile).

Pentru rezolvarea ecuaţiilor de tip (10) se face schimbarea de variabilă $z(t) = x^{1-\alpha}$ care conduce la o ecuaţie liniară de ordinul întâi în variabilele t şi z(t).

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve problema: $\begin{cases} tx' = 2t^2\sqrt{x} + 4x,\ t \in [1, \infty[\\ x(1) = 0 \end{cases}$

Rezolvare: Considerăm ecuaţia $tx' = 2t^2\sqrt{x} + 4x$, care este o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = \frac{1}{2}$.

Facem substituţia $z(t) = x^{1-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z^2 = x \Rightarrow x'(t) = 2zz'$ şi obţinem $2tzz' = 2t^2z + 4z^2 \Leftrightarrow$ $z(t) = 0$, $t \geq 1$ care este soluţie a ecuaţie, iar pentru $z \neq 0$ avem $2tz' = 2t^2 + 4z \Leftrightarrow tz' - 2z = t^2$. Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară în variabilele t şi z(t).

O rezolvăm: $tz' - 2z = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z}dz = \frac{2}{t}dt \Leftrightarrow \ln|z| = 2\ln|t| + \ln|c|$;

Apoi, $z = ct^2$, $c \in R$ dă mulţimea soluţiilor pentru ecuaţia omogenă asociată.

Căutăm $z_p = \varphi(t) \cdot t^2$. Înlocuind în ecuaţia neomogenă avem:

$$t\left(\varphi'(t) \cdot t^2 + \varphi(t) \cdot 2t\right) - 2\varphi(t) \cdot t^2 = t^2 \Leftrightarrow \varphi' \cdot t^3 = t^2 \Leftrightarrow \varphi' = \frac{1}{t} \Rightarrow \varphi(t) = \ln t, \text{ deci } z_p(t) = t^2 \cdot \ln t.$$

Astfel $z = ct^2 + t^2 \cdot \ln t$, $t \in [1, \infty]$; $c \in R$ şi $z = 0$, $t \in [1, \infty]$ dă familia soluţiilor ecuaţiei în necunoscuta $z = z(t)$.

Corespunzător $x(t) = [ct^2 + t^2 \cdot \ln t]^2$, $t \geq 1$; $c \in R$ şi $x(t) = 0$, $t \geq 0$ dă mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei date.

Condiţia $x(1) = 0$ conduce la: $c^2 = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

Soluţiile problemei sunt: $x_1(t) = t^4 \cdot \ln^2 t$, $t \geq 1$; $x_2(t) = 0$, $t \geq 1$.

2. Să se rezolve $t(x + 1)x' = t^2 \cdot x' + (x + 1)^2$

Rezolvare: Este o ecuaţie Bernoulli în t=t(x) ca funcţie necunoscută cu $\alpha = 2$.

Facem $z(x) = t^{1-2} = t^{-1}$, $t \neq 0 \Rightarrow t = \frac{1}{z} \Rightarrow t'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)}$

Avem $t(x + 1)x' = t^2x' + (x + 1)^2 \quad \left| \cdot \frac{dt}{dx} \right.$

$$t(x + 1) = t^2 + (x + 1)^2 \cdot t'(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot \left(-\frac{z'}{z^2}\right) + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z}(x+1) \quad \left| \cdot \left(-z^2\right) \right.$$

$(x+1)^2 \cdot z' - 1 = -(x+1) \cdot z \Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot z' + (x+1) \cdot z = 1.$

Am obţinut o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi în z = z(x). Se obţin în final soluţiile (în formă implicită):

$$x + 1 = ct + t \cdot \ln|x+1| \ , \ c \in R \text{ şi } x(t) = -1 \ , \ t \in R.$$

Probleme propuse

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii şi probleme asociate unor ecuaţii Bernoulli:

a) $tx' = 2t^2\sqrt{x} + 4x$

b) $x' = x \cdot \cos t + x^2 \cdot \cos t$

c) $x' - x \cdot tgt = x^4 \cdot \cos t$

d) $x' - \frac{t}{2(t^2-1)} \cdot x = \frac{t}{2x}$

e) $x' + 2x = x^2 e^t$

f) $tx' + x + t^5 x^3 e^t = 0$

g) $\begin{cases} tx' + x = x^2 \cdot \ln t \\ x(1) = 1 \end{cases}$

h) $x' t^3 \sin x = tx' - 2x$

i) $\begin{cases} x' - 9t^2 x = t^2(t^3+1) \cdot x^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

j) $x' + \frac{x}{t} = \frac{1}{t^2 x^2}$

1.5. Ecuaţii de tip Riccati

Forma generală a unei ecuaţii Riccati este: **$x' = a(t)x + b(t)x^2 + c(t)$** (11)

unde a, b, c : $]t_1, t_2[\subset R \to R$ sunt funcţii continue date.

În general, o ecuaţie de tip Riccati nu se poate rezolva efectiv. Totuşi, dacă se cunoaşte o soluţie particulară $x = p(t)$ a sa, atunci prin schimbarea de funcţie $x = p + \frac{1}{z(t)}$ se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în variabilele t şi z(t).

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve ecuaţia $x' + x^2 \sin t = 2\frac{\sin t}{\cos^2 t}, t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ştiind că admite soluţia $p(t) = \frac{1}{\cos t}$.

Rezolvare: Facem schimbarea de variabilă: $x = \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{z(t)}$.

Rezultă $x'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} - \frac{z'(t)}{z^2(t)}$. Înlocuind în ecuaţie şi făcând calculele avem:

z’ = 2z·tgt + sint sau z’-2z·tgt = sint care este o ecuaţie liniară având soluţiile

$$z(t) = \frac{c}{\cos^2 t} - \frac{\cos t}{3}, c \in R.$$

Rezultă pentru ecuaţia în x = x(t) soluţiile:

$x(t) = \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\frac{c}{\cos^2 t} - \frac{\cos t}{3}}, t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[; c \in R$, care se adaugă soluţiei cunoscute $p(t) = \frac{1}{\cos t}$.

2. Să se rezolve ecuaţia $x' = x^2 + 6x - 4t^2 + 11$ ştiind că admite ca soluţie o funcţie polinomială.

Rezolvare: Căutăm o soluţie particulară sub forma p(t) = a·t + b ; a, b∈R. Cerând ca p să verifice ecuaţia dată se obţin prin identificare a = 2 şi b = -3. Astfel p(t) = 2t - 3 e o soluţie particulară a ecuaţiei date.

Facem acum schimbarea $x = 2t - 3 + \frac{1}{z(t)}$ şi, procedând ca mai sus se obţin celelalte soluţii

$$x = 2t - 3 + \frac{e^{2t^2}}{c - \int e^{2t^2} dt}; c \in R.$$

Probleme propuse

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii Riccati, cunoscându-se soluţiile particulare indicate în fiecare caz:

a) $(t^2 + 1)x' = 2tx^2 + 2t(4t^2 + 3)x + 4t^3(t^2 + 1)$; punem $p(t) = -t^2 - 1$;

b) $x' = x^2 - t^2 + 1$; punem p(t) = polinom de gradul întâi;

c) $x' - x^2 + 2xe^t = e^{2t} + e^t$; (facem substituţia $p(t) = e^t$) ;

d) $x' - x^2 - \frac{x}{t} + 9t^2 = 0$; (facem substituţia p(t) = 3t);

e) $x' + x^2 - \frac{1}{2t^2} = 0$; (facem substituţia $p(t) = \frac{a}{x}; a \in R$).

1.6. Ecuaţii cu diferenţială totală exactă

Ecuaţia diferenţială de ordinul întâi de forma:

$$\mathbf{P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0}; \quad (t, x) \in \Omega \qquad (12)$$

(unde P, Q∈C(Ω), Ω⊂R^2 un domeniu) se numeşte *ecuaţie cu diferenţială totală exactă* dacă şi numai dacă există U∈C^1(Ω) care are proprietatea:

$$dU(t, x) = P(t, x)dt + Q(t, x)dx \qquad (13)$$

În acest caz rezultă că ecuaţia (12) se poate scrie $dU = 0$ şi deci are familia de soluţii dată de expresia $U(t, x) = c$, $c \in R$.

Dacă $P, Q \in C^1(\Omega)$ atunci se ştie că (12) este o ecuaţie diferenţială totală exactă dacă şi numai dacă sunt verificate:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) \qquad , \forall (t, x) \in \Omega \tag{14}$$

Condiţia (14) se numeşte *condiţia de complet integrabilitate* a ecuaţiei (12). În acest caz funcţia $U(t, x)$ se calculează prin

$$U(t, x) = \int_{t_o}^{t} P(s, x)ds + \int_{x_o}^{x} Q(t_o, y)dy \tag{15}$$

unde $(t_o, x_o) \in \Omega$ arbitrar.

Dacă pentru o ecuaţie de forma (12) are loc relaţia:

$$\exists (t, x) \in \Omega \text{ astfel încât } P(t, x)dt + Q(t, x)dx \neq 0$$

(adică ea nu este cu diferenţială totală exactă) atunci sunt situaţii în care există o funcţie $\mu \in C^1(\Omega)$ cu proprietatea că înmulţind ecuaţia cu această funcţie ea să devină o ecuaţie cu diferenţială totală exactă.

$$\mu(t, x)P(x, y)dt + \mu(t, x)Q(t, x)dx = 0 \tag{16}$$

Funcţia μ cu această calitate se numeşte *factor integrant* pentru ecuaţia iniţială. Factorul integrant μ se găseşte din condiţia de complet integrabilitate a ecuaţiei (16) şi anume:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu \cdot P) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu \cdot Q) \tag{17}$$

Ecuaţia (17), numită ecuaţia factorului integrant, este în general o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi. Există câteva situaţii notabile în care funcţia $\mu = \mu(t, x)$ se poate determina, dintre care amintim:

1) Dacă expresia următoare e independentă de x, adică:

$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) = \varphi(t)$ atunci obţinem $\mu = \mu(t)$ (deci independent de x) din ecuaţia diferenţială $\mu'(t) = \varphi(t) \cdot \mu(t)$.

2) Dacă expresia următoare e independentă de t, adică:

$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) = \psi(x)$ atunci obţinem $\mu = \mu(x)$ (deci independent de t) din in ecuaţia diferenţială $\mu'(x) = \psi(x) \cdot \mu(x)$.

Probleme rezolvate

1. Să se afle mulţimea soluţiilor ecuaţiei: $3t(t + 2x^2)dt + 2x(3t^2 + 2x^2)dx = 0, \quad (t, x)\in R^2$.

Rezolvare: Avem $P(t, x) = 3t^2 + 6tx^2$ şi $Q(t, x) = 6t^2x + 4x^3$. Apoi,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 12tx \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = 12tx$$

Astfel ecuaţia dată este cu diferenţială totală exactă. Funcţia U = U(t, x) se determină din formula (15).

$$U(t, x) = \int_0^t \left(3s^2 + 6sx^2\right)ds + \int_0^x \left(6\cdot 0^2 \cdot y + 4y^3\right)dy =$$

$$= 3\cdot \frac{s^3}{3}\Big|_0^t + 6x^2 \cdot \frac{s^2}{2}\Big|_0^t + 4\cdot \frac{y^4}{4}\Big|_0^x = t^3 + 3t^2x^2 + x^4$$

(am ales $(t_o, x_o) = (0, 0)\in R^2$).

Soluţia generală a ecuaţiei (în formă implicită): $t^3 + 3t^2x^2 + x^4 = c, \quad c\in R$.

2. Să se rezolve: $(1-t^2x)dt + (t^2x-t^3)dx = 0, \quad (t, x)\in\Omega =]0, \infty[\times R$.

Rezolvare: $\frac{\partial P}{\partial x} = -t^2$ şi $\frac{\partial Q}{\partial t} = 2tx - 3t^2$. Deci ecuaţia nu este cu diferenţială totală exactă. Calculăm expresia $\varphi = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right)$ şi obţinem că $\varphi = \varphi(t) = -\frac{2}{t}$. În consecinţă se poate determina un factor integrant independent de x, $\mu = \mu(t)$, din ecuaţia $\mu'(t) = \varphi(t)\cdot\mu(t)$.

$\mu' = -\frac{2}{t}\cdot\mu$ şi prin integrarea acestei ecuaţii cu variabilele separabile obţinem succesiv:

$$\frac{1}{\mu}d\mu = -\frac{2}{t}dt \Leftrightarrow \ln|\mu| = -2\ln|t| + \ln|c| \Leftrightarrow \mu = \frac{c}{t^2}; c\in R$$

Alegând c = 1 (avem nevoie de un singur factor integrant) şi înmulţind ecuaţia cu $\mu(t) = \frac{1}{tz}$ avem:

$$\left(\frac{1}{t^2} - x\right)dt + (x - t)dx = 0\,.$$

În acest caz: $P_1(t, x) = \frac{1}{t^2} - x$; $Q_1(t, x) = x - t$ şi se verifică că: $\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial Q_1}{\partial t} = -1 \quad , \forall (t, x)\in\Omega$.

Calculăm:

$$U(t, x) = \int_1^t \left(\frac{1}{s^2} - x\right)ds + \int_0^x (y-1)dy = \frac{s^{-1}}{-1}\Big|_1^t - x\cdot s\Big|_1^t + \frac{y^2}{2}\Big|_0^x - y\Big|_0^x =$$

$$= -\frac{1}{t} + 1 - x(t-1) + \frac{x^2}{2} - x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{t} - xt + 1$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{t} - xt = c, \quad c\in R$.

1.7. Ecuaţii implicite

Se consideră ecuaţia diferenţială de ordinul întâi în formă generală:

$$\mathbf{F(t, x, x') = 0} \qquad (18)$$

unde $F:\Omega\subset R^3\to R$ este astfel încât ecuaţia să fie rezolvabilă în raport cu x'.

Metoda de rezolvare a unei ecuaţii de tipul (18) se numeşte *metoda Sophus Lie* şi constă în următoarele:

i) se ataşează ecuaţiei suprafaţa de ecuaţie: (S) $F(t, x, y) = 0$ (obţinută prin înlocuirea lui x' cu y);

ii) se transcrie (dacă e posibil) ecuaţia suprafeţei (S) în formă parametrică :

$$(S')\begin{cases} t = f(u,v) \\ x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases} \qquad (u, v)\in D\subset R^2 ;\ f, g, h\in C^1(D);$$

iii) unei soluţii $x = \varphi(t)$, $t\in I$ ($I\subset R$ interval) a ecuaţiei $F(t, x, x') = 0$ îi corespunde în mod biunivoc o curbă (Γ) pe suprafaţa S, curbă de ecuaţii parametrice:

$$(\Gamma)\begin{cases} t = t \\ x = \varphi(t) \\ x' = \varphi'(t) \end{cases} ;\ t\in I,$$ pentru care are loc egalitatea diferenţială $dx = ydt$, egalitate echivalentă cu: $\frac{\partial g}{\partial u}du+\frac{\partial g}{\partial v}dv = h(u,v)\left[\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv\right]$

Evident proiecţia curbei (Γ) în planul tox furnizează o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (18).

iv) Rezolvăm ecuaţia

$$\frac{\partial g}{\partial u}du+\frac{\partial g}{\partial v}dv = h(u,v)\left[\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv\right] \qquad (19)$$

v) Dacă $v = \psi(u, c)$, $u\in J$ ($J\subset R$ interval) şi $c\in R$ este soluţia generală a ecuaţiei (19) atunci soluţia corespunzătoare a ecuaţiei (18) este (în formă parametrică):

$$\begin{cases} t = f(u, \psi(u,c)) \\ x = g(u, \psi(u,c)) \end{cases}, \qquad u\in J \text{ şi } c\in R.$$

Există două situaţii particulare în care această metodă se simplifică mult. Anume:

1.7.1. Ecuaţia lui Clairaut

Forma generală a ecuaţiei lui Clairaut este:

$$\mathbf{x = tx' + \psi(x')}, \qquad \psi\in C^1(I)\ ,\ I\subset R \text{ interval.}$$

În această situaţie procedăm astfel:

i) derivăm ecuaţia dată în raport cu tşi avem: $x'= x'+ tx''+ \psi'(x')\cdot x''$

ii) notăm $x'= p(t)$, $p\in C^1(I, J)$ şi avem: $p'(\psi'(p) + t) = 0$ care conduce la două variante:

a) $p = c$, $c\in R$ şi soluţia generală: $x = tc + \psi(c)$, $c\in R$ (20)

b) $\begin{cases} t = \psi'(p) \\ x = -\psi'(p)\cdot p + \psi(p) \end{cases}$, $p \in J$, care reprezintă o soluţie în formă parametrică

numită *soluţia singulară a ecuaţiei lui Clairaut*.

***Observaţie*:** Soluţia singulară a ecuaţiei reprezintă tocmai înfăşurătoarea familiei de drepte dată de soluţia generală.

1.7.2. Ecuaţia lui Lagrange

Forma generală a ecuaţiei lui Lagrange este:

$$\mathbf{x = t\cdot\varphi(x') + \psi(x')}, \qquad t\in I \qquad (21)$$

unde $\varphi, \psi\in C^1(J)$, $J\subset R$ interval şi $\varphi(\alpha) \neq \alpha$, $\forall\alpha\in J$.

Pentru determinarea tuturor soluţiilor ecuaţiei procedăm astfel:

i) derivăm ecuaţia în raport cu t şi avem:

$$x'= \varphi(x') + t\cdot\varphi'(x')\cdot x'' + \psi'(x')\cdot x''$$

ii) notăm $x'= p(t)$, $p\in C^1(I, J)$ şi obţinem:

$$p-\varphi(p) = p'[t\cdot\varphi'(p) + \psi'(p)]$$

iii) facem în ecuaţie schimbarea de variabilă $\begin{cases} t = p \\ p = t \end{cases}$

(ceea ce formal se poate obţine prin înmulţirea ecuaţiei cu $\frac{dt}{dp}$) şi avem:

$$[p - \varphi(p)]\cdot\frac{dt}{dp} = t\cdot\varphi©(p) + \psi©(p)$$

iii) rezolvăm ecuaţia liniară în $t=t(p)$:

$$[p - \varphi(p)]\cdot t'(p) - \varphi'(p)\cdot t(p) = \psi'(p)$$

şi obţinem soluţia generală $t=t(p,c)$, $p\in J$; $c\in R$.

Atunci ecuaţia lui Lagrange are soluţiile (în formă parametrică) :

$$\begin{cases} t = t(p,c) \\ x = t(p,c)\cdot\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}; \ (t,p)\in I\times J;\ c\in R.$$

În cazul în care ecuaţia $\varphi(\alpha)=\alpha$ are soluţia $\alpha=\alpha_o\in I$ atunci funcţia $x=t\cdot\alpha_o+\psi(\alpha_o)$, $t\in I$ reprezintă o singură soluţie (numită *singulară*) a ecuaţiei lui Lagrange.

Probleme rezolvate

1 Să se rezolve ecuaţia de tip Lagrange: $x=t(1+x')+(x')^2$, $t\in R$.

Rezolvare: Derivăm ecuaţia în raport cu t şi notăm $x'=p(t)$; $p\in C(I, J)$. Obţinem: $x'=1+x'+tx''+2x'\cdot x'' \Leftrightarrow p'(t+2p)=-1 \quad \left|\cdot\frac{dt}{dp}\right., \; t+2p=-\frac{dt}{dp} \Leftrightarrow t'(p)+t(p)=-2p$

Am obţinut o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta t=t(p). Rezolvând-o prin metoda indicată la 3, obţinem familia soluţiilor sale de forma: $t=c\cdot e^{-p}+2(1-p),\; c\in R.$

În consecinţă, familia soluţiilor pentru ecuaţia Lagrange considerată este (în formă parametrică):

$$\begin{cases} t(p)=c\cdot e^{-p}+2(1-p) \\ x(p)=\left[c\cdot e^{-p}+2(1-p)\right](1-p)+p^2 \end{cases} \quad p\in J; c\in R.$$

2. Să se rezolve ecuaţia de tip Lagrange: $x=t\cdot(x')^2-\frac{1}{x'}, t\in R.$

Rezolvare: Aici $\varphi(p)=p^2$ şi ecuaţia $\varphi(p)=0$ are soluţiile p=0 şi p=1. Avem:

$$x'=x'^2+2tx'x''+\frac{x''}{(x')^2} \Leftrightarrow p'(1+2tp^3)=p^3-p^4 \quad \left|\cdot\frac{dt}{dp}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^3(1-p)\cdot t''-2p^3t=1$$

Am obţinut ecuaţia diferenţială liniară de forma $p^3(1-p)\cdot t'-2p^3t=1$; $p\in(-\infty,0)$ sau $p\in(0,1)$ sau $p\in(1,\infty)$. Rezolvând-o avem:

$$x(p)=\frac{1}{(p-1)^2}\cdot\left(c+\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^2}\right),\; c\in R.$$

Astfel soluţia în formă parametrică obţinută este:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{(p-1)^2}\cdot\left(c+\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^2}\right) & p\in(-\infty,1) \\ y=\frac{1}{(1-p)^2}\cdot\left(cp^2+p-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p} & (\text{sau } p\in(0,1);\ \text{sau } p\in(1,\infty)) \end{cases}, c\in R$$

În plus, deoarece funcţia $\varphi(p)=p^2$ obţinem rădăcinile p=0 şi p=1 care conduc la x'=0 care nu convine, şi respectiv $x'=1 \Leftrightarrow x=t-1$, $t\in R$ care este soluţie pentru ecuaţia Lagrange (soluţie care nu se obţine pentru nici o valoare a lui $c\in R$ în familia de soluţii de formă parametrică).

3. Să se rezolve ecuaţia de tip Clairant: $x=t\cdot x'-(x')^2$, $t\in R$.

Rezolvare: Prin derivare obţinem $tx''-2x'x''=0$. Notăm $x'=p(t)$, $p\in C(R)$ şi avem $p'(t-2p)=0$.

Distingem două cazuri:

a) $p'=0 \Leftrightarrow p=c$, $c\in R$ şi familia de soluţii $x=ct-c^2$, $c\in R$

b) $t=2p \Rightarrow x=p^2$ şi soluţia singulară (în formă parametrică)

$$\begin{cases} t = 2p \\ x = p^2 \end{cases} \quad p \in R.$$

Eliminând p între cele două ecuaţii obţinem forma explicită a soluţiei singulare $x = \frac{t^2}{4}$, $t \in R$.

4. Să se rezolve ecuaţia: $x - (x')^2 - 3tx' - \frac{3}{2}t^2 = 0 \quad , t \in R$

Rezolvare: Ataşăm ecuaţiei date suprafaţa (S) de ecuaţie implicită (S) $x - y^2 - 3ty - \frac{3}{2}t^2 = 0$,

obţinută din ecuaţie prin înlocuirea lui x' cu y. Scriem (S) în reprezentarea parametrică:

$$(S') \begin{cases} t = u \\ x = v^2 + 3uv + \frac{3}{2}u^2 \\ y = v \end{cases} \quad ; (u, v) \in R^2$$

Condiţia $dx=y\cdot dt$ conduce la:

$$\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = v\left(\frac{\partial t}{\partial u}du + \frac{\partial t}{\partial v}dv\right) \Leftrightarrow (3v + 3u)du + (2v + 3u)dv = vdu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2v + 3u) \cdot (du + dv) = 0.$$

Să considerăm v=v(u) şi obţinem:

a) $v = -\frac{3}{2}u$ care generează (prin proiecţie pe (t°x)) funcţia:

$$\begin{cases} t = u \\ x = \frac{9}{4}u^2 - \frac{9}{2}u^2 + \frac{3}{2}u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = u \\ x = -\frac{3}{2}u^2 \end{cases} \Leftrightarrow x(t) = -\frac{3}{4}t^2,$$

ce verifică ecuaţia dată, fiind soluţie.

b) $du+dv=0 \Leftrightarrow dv=-du \Leftrightarrow v=-u+c$, $c\in R$ care conduce la familia de soluţii:

$$\begin{cases} t = u \\ x = (-u + c)^2 + 3u(-u + c) + \frac{3}{2}u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = u \\ x = -\frac{u^2}{2} + cu + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow x(t) = -\frac{t^2}{2} + ct + c^2 \; ; c \in R \quad .$$

5. Să se rezolve ecuaţia: $t\cdot\sin x' + \ln x' = 0 \quad ; t > 1$

Rezolvare: Notăm $x'=p(t)$, $p \in C\left((1, \infty), R_+^*\right)$ şi obţinem $t=\sin p - \ln p$.

Vom scrie soluţia ecuaţiei în formă parametrică şi pentru aceasta avem nevoie de x=x(p);

$$x'=p \Leftrightarrow \frac{dx}{dt}=p \Leftrightarrow dx=p\cdot dt \Leftrightarrow dx=p\cdot d(\sin p-\ln p) \Leftrightarrow dx=p\cdot\left(\cos p-\frac{1}{p}\right)dp.$$

Prin integrare avem:

$$x=\int p\cdot\left(\cos p-\frac{1}{p}\right)dp=p\cdot\sin p+\cos p-p+c,\quad c\in R.$$

Familia de soluţii în formă parametrică este: $\begin{cases} t=\sin p-\ln p \\ x=p\cdot\sin p+\cos p-p+c \end{cases}$ $p\in R_+^*;\ c\in R.$

Probleme propuse

1. Să se rezolve ecuaţiile de tip Clairaut:

a) $x=tx'+\sqrt{1+x'^2}$, $t\in R$;

b) $x=tx'+\sin x'$, $t\in(-\infty,1)$;

c) $x=tx'+2(x')^{12}$, $t\geq 0$;

d) $x=tx'+\frac{1}{5}(x')^5$.

2. Să se rezolve ecuaţiile de tip Lagrange:

a) $x=\frac{3}{2}tx'+e^{x'}$;

b) $x=t(1-x')+2(x')^2$;

c) $x=t(x')^2+\frac{1}{x'}$;

d) $x=(x')^2+(x')^3$.

3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $tx'^2-2xx'+t=0$;

b) $t+\cos x'-\frac{1}{x'}=0$;

c) $x=x'^2e^{x'}$;

d) $(x')^2-tx'-x+\frac{t^2}{2}=0$.

2. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior

2.1. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior integrabile prin cuadraturi

Sunt ecuaţiile diferențiale de forma $\mathbf{x^{(n)}=f(t)}$; $f\in C(I)$ ($I\subset R$ interval).

Prin n integrări succesive în raport cu t se obţine familia de soluţii depinzând de n constante reale arbitrare.

Se poate arăta, prin inducţie după $n \in N^*$ că soluţia generală x(t) are reprezentarea:

$$x(t) = \int_{t_o}^{t} \frac{(t-s)^{n-1} \cdot f(s)}{(n-1)!} ds + c_1 \frac{(t-t_o)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + c_{n-1}(t-t_o) + c_n$$

unde $c_i \in R$, pentru i=1, 2, …, n şi $t \in I$.

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve ecuaţia: $x'' = \frac{2}{t} + 1 \quad , t \in (0, \infty)$.

Rezolvare: Avem $x' = 2\int \frac{1}{t} dt + t + c_1 = 2\ln t + t + c_1$

$$x = 2\int \ln t + \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 = 2(t \cdot \ln t - t) + \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 = 2t \cdot \ln t + \frac{t^2}{2} + t(c_1 - 2) + c_2$$

şi în final : $x = 2\int t \cdot \ln t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}(c_1 - 2) + c_2 t + c_3 =$

$$= t^2 \cdot \ln t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}(c_1 - 2) + c_2 t + c_3$$

sau $x(t) = t^2 \cdot \ln t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}(c_1 - 3) + c_2 t + c_3$, $t \in (0, \infty)$; $c_1, c_2, c_3 \in R$.

2. Să se rezolve problema lui Cauchy: $\begin{cases} x'' = t + \sin t \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}, t \in R$

Rezolvare: Integrând succesiv de două ori obţinem:

$$x(t) = \frac{t^3}{6} - \sin t + c_1 t + c_2 \quad \left(\text{evident} \quad x'(t) = \frac{t^2}{2} - \cos t + c_1 \right)$$

Condiţiile x(0)=1 şi x'(0)=0 conduc la sistemul: $\begin{cases} c_2 = 1 \\ -1 + c_1 = 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$

Soluţia problemei este: $x(t) = \frac{t^3}{6} - \sin t + t + 1 \quad , t \in R$.

Probleme propuse

1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) x'''=ln t; c) $x'' = t \cdot e^{2t}$;

b) $x^{(4)}=1$; d) x'''=1+t+cos t.

2. Să se rezolve problemele:

a) $x'' = \frac{\ln t}{t^2}$, $t > 1; x(1) = 0, x'(1) = 1, x''(1) = 2$;

b) $x'' = t \cdot \ln t$, $t \in [3, \infty); x(3) = 1, x'(3) = 0$;

c) $\begin{cases} x'' = t^2 + t \\ x(0) = 1 \\ x(4) = 9 \end{cases}$, $t \in [0, 4]$

d) $\begin{cases} x^{(4)} = 1 + e^t \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0 \end{cases}$, $t \in R$.

2.2. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior care admit reducerea ordinului

A. Ecuaţii de forma **$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(n)})=0$**

Facem schimbarea de funcţie $x^{(k)}=z(t)$. Rezultă

$$x^{(k+1)}=z', \dots, x^{(n)}=z^{(n-k)}.$$

Se obţine o reducere a ordinului cu k unităţi.

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve ecuaţia: $x''' - x'' = 0, \quad t \in R.$

Rezolvare: Facem $x'' = z$ şi rezultă $x''' = z'$. Obţinem ecuaţia $z' - z = 0$ care e o ecuaţie cu variabilele separabile de ordinul întâi.

Avem $z' = z \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = z \Leftrightarrow z = 0$ e soluţie iar pentru $z \neq 0$ avem

$$\frac{1}{z} dz = dt \Leftrightarrow \ln|z| = t + \ln|c| \quad \text{sau} \quad z = c_1 \cdot e^t ; c_1 \in R^* .$$

Familia de soluţii pentru ecuaţia în z este $z = c_1 \cdot e^t , c_1 \in R.$

Atunci $x'' = z$ conduce la $x'' = c_1 \cdot e^t$.

Două integrări succesive implică $x(t) = c_1 \cdot e^t + c \cdot t + c_3$, $t \in R; c_1, c_2, c_3 \in R$.

2. Să se rezolve problema lui Cauchy: $\begin{cases} tx'' + x' + t = 0 \\ x(1) = 0 \\ x'(1) = 0 \end{cases}$, $t \in [1, \infty)$.

Rezolvare: Facem x'=z(t) şi obţinem ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi z'+z=-t. Rezolvând obţinem $z(t)=\frac{c_1}{t}-2t$.

Din $x'=\frac{c_1}{t}-2t$ avem $x(t)=c_1\cdot\ln t-t^2+c_2 \quad , t\geq 1; c_1, c_2\in R$.

Condiţiile de tip Cauchy conduc la sistemul: $\begin{cases}-1+c_2=0\\ c_1-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1=2\\ c_2=1\end{cases}$

şi unica soluţie a problemei este $x(t)=\ln t-t^2+2 \quad , t\geq 1$.

Probleme propuse

1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $tx'''+x''=1+t \quad , t\in(-\infty,-1]$;

b) $x''=1-(x')^2 \quad , t\in R$;

c) $tx^{V}-x'''=0 \quad , t\in(1,\infty)$;

d) $(t-1)x''+2x'=\frac{t+1}{2t^2} \quad , t\in(2,\infty)$.

2. Să se rezolve problemele:

a) $4x'+(x'')^2=4tx'' \quad , x(0)=0, x'(0)=-1$;

b) $tx''=\sqrt{1+x'^2} \quad , x(1)=0, x(e^2)=1$;

c) $x''=x'\cdot\ln x' \quad , t\in[0,\infty), x(0)=0, x'(0)=1$;

d) $x''=2x'+t \quad , t\in[0,1], x(0)=0, x(1)=1$.

B. Ecuaţii de forma **$F(x, x', x'', \dots, x^{(n)})=0$**, $n\in N^*$.

Facem schimbarea de funcţie x'=p(x). Se obţine reducerea ordinului ecuaţiei cu o unitate. Atragem atenţia că pentru obţinerea derivatelor x'', x''' trebuie să derivăm pe x' ţinând cont că e funcţie compusă x'=p(x(t)), adică

$$x''(t)=p(x(t))'=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=p'\cdot x=p'\cdot p.$$

Analog $x'''(t)=p''\cdot p^2+(p')^2\cdot p$, etc. Se obţine o ecuaţie de ordinul n-1 în necunoscuta p=p(x).

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve ecuaţia: $2xx''-3(x')^2=4x^2$.

Rezolvare: Observăm x(t)=0 e soluţie pentru ecuaţie. Fie x≠0. Notăm x'=p(x) şi deducem x''=p'·p. Avem $2xpp'-3p^2=4x^2$. Pentru x≠0 obţinem $2\left(\frac{p}{x}\right)\cdot p'-3\left(\frac{p}{x}\right)^2=4$ care e o ecuaţie omogenă în sensul lui Euler. Facem schimbarea de funcţie $\frac{p}{x}=z(x)$ şi deducem p'=z+xz'. Înlocuind şi efectuând calculele obţinem ecuaţia cu variabilele separabile:

$$2xzz' = z^2 + 4 \Leftrightarrow \int \frac{2z}{z^2+4} dz = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \ln(z^2+4) = \ln|cx|$$

$$\Leftrightarrow z^2+4=cx \Leftrightarrow z^2=cx-4.$$

Cum $p^2=x^2 \cdot z^2$ avem: $p^2=cx^3-4x^2 \Leftrightarrow p = \pm x\sqrt{cx-4} \Leftrightarrow x' = x\sqrt{cx-4} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = x\sqrt{cx-4}$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{cx-4}} = \int dt \,.$$

Facem schimbarea de variabilă: $\sqrt{cx-4} = y$ şi obţinem:

$$2\int \frac{dy}{y^2+4} = t + c_1 \Leftrightarrow \operatorname{arctg} \frac{y}{2} = t + c_1 \Leftrightarrow x = \frac{4}{c \cdot \cos(t+c_1)}; c \in R^*$$

În plus avem soluţia x(t)=0.

Probleme propuse

1. Să se rezolve ecuaţiile şi problemele următoare:

a) $\begin{cases} x^2 + (x')^2 - 2xx'' = 0 \\ x(0) = x'(0) = 1 \end{cases}$;

b) $xx'' - 2xx' \ln x = (x')^2$;

c) $\begin{cases} 1 + xx' + (x')^2 = 0 \\ x(1) = 0 \\ x'(1) = 1 \end{cases}$;

d) $xx'' - (x')^2 + (x')^3 = 0$.

C. Ecuaţii de forma **$F(t, x, x', \dots, x^{(n)})=0$,** $t \in I$ (cu F omogenă de grad k în raport cu ultimele (n+1) variabile)

Deoarece $F(t, \lambda x, \lambda x', \dots, \lambda x^{(n)}) = \lambda^k F(t, x, x', \dots, x^{(n)})$ prin schimbarea de funcţie $\frac{x'}{x} = u(t)$ se obţine reducerea ordinului ecuaţiei cu o unitate. Se poate proceda şi căutând soluţia sub forma

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} z(s)ds},$$

de asemenea obţinându-se reducerea ordinului cu o unitate.

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve problema lui Cauchy: $\begin{cases} 2xx'' + x^2 - (x')^2 = 0 \\ x(0) = x'(0) = 1 \end{cases}$, $t \geq 0$.

Rezolvare: Să observăm că x=0 nu e soluţie a problemei date. Considerăm în continuare $x\neq 0$.

Prin împărţire cu x^2 avem: $2\frac{x''}{x}+1-\left(\frac{x'}{x}\right)^2=0$

Facem schimbarea de funcţie $\frac{x'}{x}=u(t)$. Rezultă:

$$\left(\frac{x'}{x}\right)'=\frac{x''x-(x')^2}{x^2}=\frac{x''}{x}-\left(\frac{x'}{x}\right)^2 \text{ şi astfel } \frac{x''}{x}=u'+u^2.$$

Obţinem ecuaţia de ordinul întâi cu variabile separabile de forma: $2u'=-(u^2+1)$. Prin integrare

$$\operatorname{arctg} u=-\frac{1}{2}t+c_1 \quad \text{sau} \quad u=\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}t+c_1\right).$$

Cum $x'(0)=1 \Rightarrow u(0)=1 \Rightarrow \operatorname{tg} c_1=1 \Rightarrow c_1=\frac{\pi}{4}$, $u=\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)$.

Revenind la notaţiile iniţiale avem:

$$\frac{x'}{x}=\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}t+\frac{\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x=c_2\cdot\cos^2\left(-\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \quad , c_2\in R^*.$$

Din $x(0)=1 \Rightarrow c_2=2$. Astfel obţinem unica soluţie a problemei Cauchy:

$$x(t)=2\cos^2\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Probleme propuse

1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $txx''-t(x')^2-xx'=0 \quad , t>1;$

b) $x''+\frac{x'}{t}+\frac{x}{t^2}-\frac{x'^2}{x}=0 \quad , t\in[2,\infty);$

c) $x'x''-3(x'')^2=0;$

d) $xx''-x'^2-x^2x'=0.$

2. Să se rezolve problemele:

a) $2xx''+x^2-(x')^2=0 \quad , x(0)=x'(0)=1;$

b) $x^2+(x')^2-2xx''=0 \quad , x(0)=1, x'(0)=1.$

3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $t-e^{x''}+x''=0;$

b) $x-2e^{x'}+\sin x''=0.$

2.3. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior liniare

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n cu coeficienţi constanţi:

$$\mathbf{x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=g(t)} \qquad (1)$$

unde $t\in I\subseteq R$ interval; $g\in C(I)$; $a_i\in R$, $\forall i=1,2,\ldots,n$.

Notăm cu S mulţimea tuturor soluţiilor sale. Considerăm ecuaţia omogenă asociată:

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=0\ ,t\in I \qquad (2)$$

şi notăm cu S_o mulţimea tuturor soluţiilor sale.

Atunci $S=S_o+\{x_{part}\}$ unde x_{part} este o soluţie a ecuaţiei (1).

Pentru determinarea lui S_o ţinem cont că $im(S_o)=n$, ceea ce înseamnă că pentru a obţine pe S_o e suficient să punem în evidenţă n soluţii liniar independente ale ecuaţiei (2).

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt n soluţii liniar independente pentru ecuaţia (1) atunci:

$$S_o=\left\{x=\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot x_i \,\middle|\, c_1,c_2,\ldots,c_n\in R\right\}$$

Pentru construirea unui astfel de sistem de n soluţii liniar independente (numit *sistem fundamental* de soluţii) procedăm astfel:

- scriem ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei (2) şi anume următoarea ecuaţie algebrică de grad n:

$$r^n+a_1r^{n-1}+\ldots+a_{n-1}r+a_n=0 \qquad (3)$$

- determinăm toate soluţiile ecuaţiei (3): $r_1, r_2, \ldots, r_n$

- fiecare soluţie i generează câte o funcţie x_i soluţie a ecuaţiei (2) după următoarea regulă:

a) Dacă $i\in R$ şi este rădăcină simplă atunci ea generează soluţia $x_i(t)=e^{r_it}$

b) Dacă $i\in R$ este rădăcină multiplă cu ordinul de multiplicitate p atunci ea generează p soluţii liniar independente:

$$x_1(t)=e^{r_it}\ ,\ x_2(t)=t\cdot e^{r_it}\ ,\ldots,\ x_p(t)=t^{p-1}\cdot e^{r_it}$$

c) Dacă $r_{i,j}=\alpha\pm i\beta\in C$ sunt rădăcini complexe simple atunci ele generează două soluţii liniar independente:

$$x_1(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{şi} \quad x_2(t)=e^{\alpha t}\sin\beta t$$

d) Dacă $r_{i,j}=\alpha\pm i\beta\in C$ sunt rădăcini complexe multiple cu ordinul p de multiplicitate atunci ele generează 2p soluţii liniar independente de forma:

$$x_1(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t \qquad x_2(t)=e^{\alpha t}\sin\beta t$$
$$x_3(t)=t\cdot e^{\alpha t}\cos\beta t \qquad x_4(t)=t\cdot e^{\alpha t}\sin\beta t$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{2p-1}(t)=t^{p-1}e^{\alpha t}\cos\beta t \qquad x_{2p}(t)=t^{p-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

- soluţia generală a ecuaţiei (2) este combinaţie liniară de soluţii astfel obţinute, adică

$$S_O = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) \,\middle|\, c_i \in R, \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

În cazul ecuaţiei neomogene (1) pentru determinarea lui x_{part} se poate proceda astfel:

a) Metoda variaţiei constantelor lui Lagrange.

Se caută soluţia $x_{part}(t)$ sub forma indicată de soluţia generală a ecuaţiei omogene şi anume

$$x_{part}(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \cdot x_i(t) \quad , \text{unde } \varphi \in C^1(I)$$

sunt funcţii arbitrare care se determină din n-1 condiţii arbitrare şi o condiţie ca x_{part} să verifice ecuaţia neomogenă (2).

b) În cazul când membrul drept g(x) are anumite forme speciale se poate renunţa la metoda variaţiei constantelor şi se foloseşte următoarea cale simplificată:

i) Dacă $g(x)=P_m(x)$ (polinom de gradul m), atunci:

A) Dacă $a_n \neq 0$ atunci se caută $x_{part}=Q_m(x)$ unde $Q_m(x)$ este un polinom de grad m cu coeficienţi nedeterminaţi şi care se determină prin identificare.

B) Dacă $a_n=a_{n-1}=\ldots=a_{n-p+1}$, $a_{n-p}\neq 0$ atunci se caută $x_{part}=x^p \cdot Q_m(x)$, unde $Q_m(x)$ este polinom de grad m cu coeficienţi nedeterminaţi şi care se determină şi ei prin identificare.

ii) Dacă $g(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ (unde $P_m(x)$ este polinom de grad şi $\alpha \in R$) atunci:

A) Dacă α nu e rădăcină a ecuaţiei caracteristice atunci se caută $x_{part} = e^{\alpha x} Q_m(x)$, unde $Q_m(x)$ e polinom de grad m cu coeficienţi nedeterminaţi şi care se obţin prin identificare.

B) Dacă α este rădăcină a ecuaţiei caracteristice cu ordinul p de multiplicitate atunci se caută $x_{part} = x^p e^{\alpha x} Q_m(x)$, unde $Q_m(x)$ e polinom de grad m cu coeficienţi nedeterminaţi şi care se obţin prin identificare.

iii) Dacă $g(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \cos \beta x$ sau $g(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \sin \beta x$ atunci:

A) Dacă $\alpha+i\beta$ nu e rădăcină a ecuaţiei caracteristice atunci căutăm $x_{part} = e^{\alpha x}\left(Q_m^1(x)\cos \beta x + Q_m^2(x)\sin \beta x\right)$, unde Q_m^1 şi Q_m^2 sunt polinoame de grad m cu coeficienţi nedeterminaţi şi care se obţin prin identificare.

B) Dacă $\alpha+i\beta$ e rădăcină a ecuaţiei caracteristice cu ordinul "p" de multiplicitate atunci se caută $x_{part} = x^p e^{\alpha x}\left(Q_m^1(x)\cos \beta x + Q_m^2(x)\sin \beta x\right)$, unde Q_m^1 şi Q_m^2 sunt polinoame de grad m cu coeficienţi nedeterminaţi şi care se obţin prin identificare.

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale liniare şi omogene:

a) $x'''-x=0$; b) $x'''-x''=0$; c) $x^{V}+x=0$.

Rezolvare: a) Scriem ecuaţia caracteristică $r^3-1=0\Leftrightarrow(r-1)(r^2+r+1)=0 \Rightarrow r_1=1$

generează soluţia: $x_1(t)=e^t$ şi $r_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ generează soluţiile:

$$x_2(t)=e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$x_3(t)=e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei a) este:

$$S_o=\left\{x(t)=c_1e^t+c_2e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \mid c_1,c_2,c_3\in R\right\}.$$

b) Ecuaţia caracteristică este: $r^3-r^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad r^2(r-1)=0$ cu rădăcinile $r_{1,2}=0$ şi $r_3=1$. Rădăcina dublă $r_{1,2}=0$ generează soluţiile $x_1(t)=1$ şi $x_2(t)=t$ iar $r_3=1$ generează soluţia $x_3(t)=e^t$.

c) Ecuaţia caracteristică este $r^4+1=0 \Leftrightarrow \left(r^2-\sqrt{2}r+1\right)\cdot\left(r^2+\sqrt{2}r+1\right)=0$

cu rădăcinile $r_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $r_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ele generează soluţiile: $x_1(t)=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t$;

$$x_2(t)=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t,\quad x_3(t)=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t,\qquad x_4(t)=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t.$$

Toate soluţiile ecuaţiei sunt cuprinse în mulţimea :

$$S_o=\left\{c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+c_3x_3(t)+c_4x_4(t) \mid c_1,c_2,c_3,c_4\in R\right\}.$$

2. Să se rezolve ecuaţia neomogenă: $x''-x=\frac{2e^t}{e^t-1}$, $t>0$.

Rezolvare: Asociem ecuaţia omogenă, $x''-x=0$ care are ecuaţia caracteristică $r^2-1=0$ cu rădăcinile reale, simple $r_{1,2}=\pm1$. Ele conduc la soluţia generală:

$$S_o=\left\{x(t)=c_1e^{-t}+c_2e^t \mid c_1,c_2\in R\right\}$$

- căutăm $x_{part}=\varphi_1(t)\cdot e^{-t}+\varphi_2(t)\cdot e^t$; $\varphi_1,\varphi_2\in C^1((0,\infty))$

- calculăm $x'_{part}=\varphi_1'\cdot e^{-t}-\varphi_1\cdot e^{-t}+\varphi_2'\cdot e^t+\varphi_2\cdot e^t$.

- punem prima condiţie: $\varphi_1'\cdot e^{-t} + \varphi_2'\cdot e^{t} = 0$.

- calculăm $x''_{part} = -\varphi_1'\cdot e^{-t} + \varphi_1 \cdot e^{-t} + \varphi_2'\cdot e^{t} + \varphi_2 \cdot e^{t}$

- prin înlocuire în ecuaţie obţinem a doua condiţie:

$$-\varphi_1'\cdot e^{-t} + \varphi_2'\cdot e^{t} = \frac{2e^{t}}{e^{t}-1}$$

- rezolvăm sistemul $\begin{cases} \varphi_1' e^{-t} + \varphi_2' e^{t} = 0 \\ -\varphi_1' e^{-t} + \varphi_2' e^{t} = \dfrac{2e^{t}}{e^{t}-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1' = -\dfrac{e^{2t}}{e^{t}-1} \\ \varphi_2' = \dfrac{1}{e^{t}-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = -e^{t} - \ln(e^{t}-1) \\ \varphi_2 = -t + \ln(e^{t}-1) \end{cases}$.

Astfel $x_{part} = -1 - e^{-t}\ln(e^{t}-1) - te^{t} + e^{t}\ln(e^{t}-1)$ şi deci

$$S = \left\{x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{t} + x_{part} \mid c_1, c_2 \in R\right\}$$

formează mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei date.

3. Să se rezolve, ţinând cont de forma specială a membrului drept, ecuaţiile neomogene:

a) $x''+x = \cos t$, $t \in R$;

b) $x''-3x'+2x = t^2e^{2t}$, $t \in R$;

c) $x'''+x'' = 2t+1$, $t \in R$.

Rezolvare: a) Ecuaţia omogenă asociată x''+x = 0 are ca şi ecuaţie caracteristică $r^2+1=0$ cu rădăcinile $r_{1,2}=\pm i$. Rezultă

$$S_o = \left\{x(t) = c_1\cos x + c_2\sin x \mid c_1, c_2 \in R\right\}$$

Funcţia g(x)=cos x este de forma $e^{\alpha x}P_m(x)\cos \beta x$ cu $\alpha=0$, m=0, $\beta=1$. Cum $\alpha+i\beta=I$ e rădăcină simplă a ecuaţiei caracteristice căutăm

$$x_{part} = e^{0t}t\left(Q_0^1(t)\cos t + Q_0^2(t)\sin t\right) = t(a\cos t + b\sin t) \quad ; a, b \in R$$

Înlocuind în ecuaţia neomogenă avem

$$-2a\cdot\sin t + 2b\cdot\cos t = \cos t \quad , t \in R \Rightarrow \begin{cases} -2a = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}, \text{ deci } x_{part} = \frac{1}{2}x\cdot\sin x.$$

Astfel, $S = \left\{c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}x\cdot\sin x \mid c_1, c_2 \in R\right\}$.

b) Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este $r^3 - 3r + 2 = 0$, deci $r_1=1$ şi $r_2=2$. Astfel avem

$$S_o = \left\{x(t) = c_1e^{t} + c_2e^{2t} \mid c_1, c_2 \in R\right\}.$$

Căutăm $x_{part}=e^{2t}tQ_2(t)=e^{2t}t(at^2+bt+c)$ (deoarece în acest caz t^2e^{2t} e de forma $P_m(t)e^{\alpha t}$ cu m=2 şi $\alpha=2$).

Prin înlocuire în ecuaţie deducem că $3at^2+(6a+2b)t+c+2b=t^2$, $t\in R$, adică sistemul:

$$\begin{cases} 3a=1 \\ 6a+2b=0 \\ c+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow \quad x_{part}=te^{2t}\left(\frac{1}{3}t^2-t+2\right)$$

Deci avem $S=\left\{x(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}+te^{2t}\left(\frac{1}{3}t^2-t+2\right) \mid c_1,c_2\in R\right\}$.

c) Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este $r^3+r^2=0 \Leftrightarrow r^2(r+1)=0$, cu rădăcina dublă $r_{1,2}=0$ şi rădăcina simplă $r_3=-1$. Obţinem

$$S_o=\left\{x(t)=c_1+c_2t+c_3e^{-t} \mid c_1,c_2,c_3\in R\right\}.$$

Căutăm $x_{part}=t^2Q_1(t)$ (deoarece g(t)=2t+1 are gradul 1 şi lipsesc doi termeni: cel cu x şi cel cu x'). Mai exact $x_{part}=t^2(at+b)$. Avem $x'=3at^2+2bt$, $x''=6at+2b$ şi $x'''=6a$. Înlocuind, avem:

$$6a+6at+2b=2t+1 \Rightarrow \begin{cases} 6a=2 \\ 6a+2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x_{part}=t^2\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{2}\right).$$

Astfel, $S=\left\{x(t)=c_1+c_2t+c_3e^t+t^2\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{2}\right) \mid c_1,c_2,c_3\in R\right\}$.

Probleme propuse

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale liniare:

a) $x'''+x=0$;

b) $x''-3x''+3x'-x=0$;

c) $x^{iv}+a^2x''=0$;

d) $x^{v}-a^4x=0$;

e) $x'^{v}+4x'''+6x''+4x'+x=0$;

f) $x^{v}-2x'''+x''=t+e^t$;

g) $x'''+x''+x'+x=e^{-t}\cos t$;

h) $x''+x=\sin t-\cos t$;

i) $x''-a^2x=e^{bt}$; $a,b\in R$;

j) $x''+x'=\frac{1}{e^t+1}$;

k) $x''+3x'+2x=\frac{2}{e^t+1}$.

2. Să se rezolve următoarele probleme asociate unor ecuaţii diferenţiale liniare:

a) $x''-x=2t$, $x(0)=x'(0)=0$, $x''(0)=2$;

b) $x''+x'-2x = 5e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 2$

c) $x''+x = t$, $x(0) = 1$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

d) $x''-x = 1$, $x(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} x(t) < \infty$.

e) $x''+x = 1$, $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$

3. Să se afle valorile parametrului real λ astfel încât următoarele probleme să admită şi soluţii nebanale:

a) $\begin{cases} x''+\lambda x = 0 & , t \in [a,b] \\ x(a) = x(b) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x''+\lambda x = 0 & , t \in R \\ x(t) = x(t+2\pi) & , \forall t \in R \end{cases}$

c) $\begin{cases} x''+\lambda x = 0 & , t \in [a,b] \\ x'(a) = x'(b) = 0 \end{cases}$

2.4. Ecuaţii diferenţiale de tip Euler

Se numeşte *ecuaţie diferenţială de tip Euler* o ecuaţie de forma:

$$a_0(at+b)^n x^{(n)} + a_1(at+b)^{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(at+b)x' + a_n x = g(x)$$

unde b, $a_i \in R$ pentru i=1, 2, …, n ; a, $a_0 \in R^*$ şi $g \in C(I)$ unde $I = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ sau $I = \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$. Facem schimbarea de variabilă:

i) $at+b=e^s$, dacă $at+b>0$

ii) $at+b=-e^s$, dacă $at+b<0$

Pentru fixarea noţiunilor să presupunem at+b>0, atunci

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{1}{\frac{dt}{ds}} = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{1}{t'(s)} = x'(s)\cdot\frac{1}{\frac{e^s}{a}} = ax'(s)e^{-s}$$

$$x''(t) = \frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(ax'(s)e^{-s}\right) = a\left[\frac{dx'(s)}{dt}e^{-s} + x'(s)\frac{d}{dt}e^{-s}\right] =$$

$$= a\left[\frac{dx'}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}e^{-s} + x'(s)\frac{de^{-s}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right] = a\left[x''(s)ae^{-2s} - x'(s)e^{-s}ae^{-s}\right] =$$

$$= a^2\left[e^{-2s}x''(s) - x'(s)\right]$$

Astfel se obţine o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n în necunoscuta x=x(s). Aceasta se rezolvă prin tehnicile din paragraful anterior.

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve ecuaţia Euler omogenă: $t^2x\text{©}\,\text{©}-3tx\text{©}+2x=0 \quad , t<0$.

Rezolvare: Facem schimbarea de variabilă $t=-e^s \Leftrightarrow \ln(-t)=s$ şi obţinem:

$$x'(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{1}{\frac{dt}{ds}}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{1}{-e^s}=-x'(s)\cdot e^{-s}.$$

Analog, $x''(t)=e^{-2s}[x''(s)-x'(s)]$. Înlocuind, avem

$$e^{2s}e^{-2s}[x''(s)-x'(s)]-3e^se^{-s}x'(s)+2x(s)=0 \Leftrightarrow x''(s)-4x'(s)+2x(s)=0$$

Ecuaţia caracteristică asociată este $r^2-4r+2=0 \Rightarrow r_{1,2}=2\pm\sqrt{2}\in R$, rădăcini simple. Deci,

$$x(s)=c_1e^{(2+\sqrt{2})s}+c_2e^{(2-\sqrt{2})s} \quad , c_1,c_2\in R.$$

Atunci,

$$S=\left\{x(t)=c_1e^{(2+\sqrt{2})\ln(-t)}+c_2e^{(2-\sqrt{2})\ln(-t)} \mid c_1,c_2\in R\right\} \text{ sau}$$

$$S=\left\{x(t)=c_1(-t)^{2+\sqrt{2}}+c_2(-t)^{2-\sqrt{2}} \mid c_1,c_2\in R\right\}.$$

2. Să se rezolve problema:

$$(1+t)^2x''+(1+t)x'+x=4\cos[\ln(1+t)] \quad , t\in(-1,+\infty)$$

Rezolvare: Facem $1+t=e^s \Leftrightarrow s=\ln(1+t)$.

Avem $x'=e^{-s}x'(s)$ şi $x''=e^{-2s}[x''(s)-x'(s)]$.

Înlocuind, obţinem ecuaţia diferenţială liniară de ordinul doi, neomogenă cu coeficienţi constanţi $x''(s)+x=4\cos s$.

Ecuaţia omogenă asociată $x''+x=0$ are ca şi ecuaţie caracteristică asociată ecuaţia $r^2+1=0$, cu soluţiile $r_{1,2}=\pm i$.

$$S_0=\{x(s)=c_1\cos s+c_2\sin s \mid c_1,c_2\in R\}$$

Deoarece membrul drept ($4\cos s$) este de forma particulară

$P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ cu $m=0$, $\alpha=0$, $\beta=1$, căutăm o soluţie particulară sub forma

$$x_{part}(s)=s(A\cos s+B\sin s).$$

Înlocuind în ecuaţia neomogenă şi identificând coeficienţii avem:

$-2A\sin s+2B\cos s=4\cos s$ deci $A=0$ şi $B=2$. Astfel,

$$S=\{x(s)=c_1\cos s+c_2\sin s+2s\cdot\sin s \mid c_1,c_2\in R\}.$$

Revenind la notaţia în t, avem

$$S = \left\{x(t) = c_1\cos[\ln(1+t)] + c_2\sin[\ln(1+t)] + 2\ln(1+t) \mid c_1, c_2 \in R\right\}.$$

Probleme propuse

1. Să se afle toate soluţiile următoarelor ecuaţii de tip Euler omogene:

a) $t^2x''+3tx'+x = 0 \quad , t > 0$

b) $(2t+1)^2x''-2(2t+1)x'+4x = 0 \quad , t < -\frac{1}{2}$

c) $(x+1)^2x''-2(x+1)x'+2x = 0 \quad , t > -1$

d) $t^3x'''-3t^2x''+6tx'-6x = 0 \quad , t < 0$.

2. Să se rezolve următoarele ecuaţii şi probleme asociate unor ecuaţii de tip Euler:

a) $t^2x''-tx'+x = 8t^3 ; t > 0$

b) $(t-2)^2x''-3(t-2)x'+4x = t ; t > 2$

c) $\begin{cases} t^2x''-3x'+x = 2t ; t > 0 \\ x(1) = 0, x'(1) = 0 \end{cases}$

d) $t^2x''-tx'+x = \frac{\ln t}{t} + \frac{t}{\ln t}; t < 0$

e) $\begin{cases} t^3x'''-t^2x''+2tx'-2x = t^3 \\ x(1) = 1, x'(1) = x''(1) = 0 \end{cases}$.

3. Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare

Fie sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi cu coeficienţi constanţi:

$$(1)\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} ; t \in I \subseteq R$$

unde $a_{ij} \in R$; i, j=1, 2, …, n.

Sistemul (1) poate fi scris în formă matriceală astfel: $X' = A \cdot X$ (2)

unde $X'=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ x_n \end{pmatrix}^I$ iar $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$.

Soluţia generală a acestui sistem se exprimă astfel:

$$S_o=\left\{x(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t) \,\middle|\, X_i=\left(x_1^i, x_2^i,\ldots, x_n^i\right) i=\overline{1,n}\right\}$$

unde X_i sunt soluţii liniar independente ale sistemului.

Determinarea vectorilor (X_1, X_2, …, X_n) se poate face cel puţin prin următoarele două metode:

a) *Metoda reducerii la o ecuaţie de ordinul n*:

Se elimină între cele n ecuaţii ale sistemului (1) "n-1" funcţii, obţinându-se ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi.

b) *Metoda ecuaţiei caracteristice*:

Se caută soluţii sub forma $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ - \\ \alpha_n \end{pmatrix}\cdot e^{rx}$. Se scrie ecuaţia caracteristică asociată sistemului, care este de forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & - & - & - & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & - & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & - & - & - & a_{nn}-r \end{vmatrix}=0$$

Dacă: **i)** ecuaţia caracteristică are n rădăcini reale distincte r_1, r_2,…,r_n , lor le corespund vectori-soluţie pentru sistem, de forma:

$$X_i=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ - \\ \alpha_n \end{pmatrix}\cdot e^{r_i t} \text{ cu } (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\neq 0 \text{ solutii ale sistemului } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ - \\ \alpha_n \end{pmatrix}\cdot A=0$$

ii) ecuaţia caracteristică are rădăcina multiplă $r=r_i$ (cu ordin p de multiplicitate) atunci aceasta generează vectorul soluţie:

$$X_i=\begin{pmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ - \\ Q_n(t) \end{pmatrix}\cdot e^{r_i t}\text{ , cu } Q_i \text{ polinoame de grad cel mult egal cu } p.$$

iii) cazul soluţiilor complexe se tratează analog.

În cazul sistemelor neomogene de forma:

$$X'=AX+B(t) \qquad (3)$$

sau extins
$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_2(t) \\ \dots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{cases} \qquad (4)$$

(cu $B\in C(I, R^n)$ şi $t\in I\subseteq R$, interval), soluţia sa generală are forma : $S = S_o + \{x^{part}\}$, unde S_o reprezintă soluţia generală a sistemului omogen asociat iar x^{part} e vector-soluţie pentru sistemul neomogen (4) care se determină prin metoda variaţiei constantelor sau cu formula specială a funcţiei B(t).

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve prin ambele metode prezentate anterior sistemul omogen:

$$\begin{cases} x_1' - 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2' + x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_3' - x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Rezolvare:

i) *Metoda reducerii*

Derivăm prima ecuaţie şi obţinem $x_1'' = 3x_1' - x_2' + x_3'$. Înlocuim din sistem pe x_2' şi x_3 şi avem: $x_1'' = 3x_1' + 2x_1 - 6x_2 + 4x_3$ (6)

Derivăm relaţia (6) şi înlocuim pe x_2' şi x_3' din (1) şi obţinem:

$$x_1''' = 3x_1'' + 2x_1' + 10x_1 - 34x_2 + 18x_3 \qquad (7)$$

Considerăm sistemul format din relaţiile (2) şi prima ecuaţie din sistemul iniţial (1):

$$\begin{cases} 6x_2 - 4x_3 = -x_1'' + 3x_1' + 2x_1 \\ x_2 - x_3 = -x_1' + 3x_1 \end{cases}$$

Exprimăm

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}\left(-x_1'' + 7x_1' - 10x_1\right) \\ x_3 = -\frac{1}{2}\left(x_1'' - x_1' + 16x_1\right) \end{cases} \qquad (8)$$

pe care le înlocuim în (7) şi obţinem o ecuaţie de ordinul trei în x_1:

$$x_1''' - 11x_1'' + 36x_1' - 36x_1 = 0$$

Ecuaţia caracteristică $r^3 - 11r^2 + 36r - 36 = 0$ are rădăcinile $r_1=2$, $r_2=3$, $r_3=6$. Obţinem:

$$x_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + c_3e^{6t} \ ; c_1, c_2, c_3 \in R.$$

Din (8) rezultă:
$$x_2 = c_2e^{3t} - 2c_3e^{6t}$$
$$x_3 = -c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + c_3e^{6t}$$

Deci soluţia sistemului este x=(x_1, x_2, x_3).

ii) *Metoda ecuaţiei caracteristice*

Căutăm soluţii de forma: $\begin{cases} x_1 = \alpha_1 e^{rt} \\ x_2 = \alpha_2 e^{rt} \\ x_3 = \alpha_3 e^{rt} \end{cases}$. Înlocuind în sistem şi împărţind cu

e^{rt} obţinem sistemul omogen: $\begin{cases} (r-3)\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + (r-5)\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + (r-3)\alpha_3 = 0 \end{cases}$.

Există soluţii nebanale dacă şi numai dacă determinantul sistemului este zero. Avem

$$\begin{vmatrix} r-3 & 1 & -1 \\ 1 & r-1 & 1 \\ -11 & 1 & r-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow r^3 - 11r^2 + 36r - 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 6$$

Pentru r_1=2 sistemul are soluţia nebanală de forma: $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$ (de exemplu).

Rezultă: $X_1 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$.

Pentru r_2=3 obţinem $X_2 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$, iar pentru r_3=6 avem $X_3 = \begin{pmatrix} e^{6t} \\ -2e^{6t} \\ e^{6t} \end{pmatrix}$. Soluţia generală este:

$$X = (X_1 \quad X_2 \quad X_3) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} & e^{6t} \\ 0 & e^{3t} & -2e^{6t} \\ -e^{2t} & e^{3t} & e^{6t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \\ 0 + c_2 e^{3t} - 2c_3 e^{6t} \\ -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \end{pmatrix}$$

Probleme propuse

1. Să se rezolve sistemele omogene:

a) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = -x_1 + 2x_{21} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1' - 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2' + 12x_1 - 5x_2 - 12x_3 = 0 \\ x_3' - 10x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x_1' - 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_2' - x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_3' + x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

2. Să se rezolve sistemele neomogene:

a) $\begin{cases} x_1' + 2x_1 + 4x_2 = 1+4t \\ x_2' + x_1 - x_2 = \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1' - 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2' - 2x_1 + x_2 = 15e^t\sqrt{t} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1' + x_1 - x_2 - x_3 = e^t \cdot \\ x_2' - x_1 + x_2 - x_3 = e^{3t} \\ x_3' - x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$

3. Să se afle soluţiilor problemelor Cauchy:

a) $\begin{cases} x_1' + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2' - x_3 = 0 \\ x_3' + x_1 - x_3 = 0 \\ y_{(1)}(0) = 0 \\ y_{(2)}(0) = y_3(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1' - 3x_1 + x_2 = 0 \\ x_2' - 10x_1 + 4x_2 = 0 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 5 \end{cases}$

4. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi

O noţiune importantă este cea de integrală primă. Să considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$X'=f(t, X) \quad , \text{ unde } f:\Omega\subset R^{n+1}\to R^n \qquad (2)$$

Printr-o *integrală primă* a sistemului (1) înţelegem o funcţie $\varphi\in C^1(\Omega)$ având proprietăţile:

i) φ nu e funcţie constantă pe Ω

ii) $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)=c$ pentru $x_1, \ldots, x_n$ soluţii ale sistemului (2)

Condiţia (ii) se poate exprima şi astfel $\varphi_\Gamma=c$, oricare ar fi $\Gamma\subset\Omega$ o curbă integrală a sistemului (2). Să mai observăm că orice sistem de forma (2) poate fi pus în aşa numita formă simetrică a unui sistem de ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}(x_1,\dots,x_n)} \qquad (3)$$

Rezolvarea sistemului (3) revine la determinarea a n integrale prime funcţional independente. O metodă de construcţie a acestor integrale prime este metoda combinaţiilor integrabile. Aceasta constă în amplificarea potrivită a şirului de rapoarte egale (3) cu factori care să inducă prin însumare un nou raport de forma $\frac{d\phi}{0}$.

$$\frac{dx_1}{x_1}=\dots=\frac{dx_{n+1}}{x_{n+1}}=\frac{\lambda_1 dx_1+\dots\lambda_{n+1}dx_{n+1}}{0}=\frac{d\phi}{0}$$

Rezultă $d\phi=0$ şi $\phi(x_1, \dots, x_{n+1})=c$, $c\in R$ o integrală primă.

4.1. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare şi omogene

Forma lor generală este:

$$X_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+X_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \qquad (4)$$

unde $x=(x_1, \dots, x_n)\in R\subset R^n$; $X_i:\Omega\to R$, $X_i\in C^1(\Omega)$, $\forall I=1, 2, \dots, n$ şi $\sum_{i=1}^{n}X_i^2(x)\neq 0$, $\forall x\in\Omega$.

Funcţia necunoscută $u=u(x)=u(x_1, \dots, x_n)$ se caută în clasa $C^1(\Omega)$. Algoritmul de rezolvare presupune parcurgerea următoarelor etape:

a) se asociază sistemul de ecuaţii diferenţiale în formă simetrică:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\dots=\frac{dx_n}{X_n}$$ (numit *sistem caracteristic*)

b) se construiesc $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ integrale prime funcţional independente ale sistemului caracteristic.

c) se scrie soluţia generală a ecuaţiei (4) sub forma:

$$u(x_1, \dots, x_n)=\Phi(\varphi_{1(x)}, \varphi_{2(x)}, \dots\varphi_{n-1(x)})$$

cu $\Phi\in C^1(\Omega_1)$, $\Omega_1\subset R^n$ o funcţie arbitrară.

4.2. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniare

Forma generală a acestor ecuaţii este:

$$X_1(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+X_n(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=X_{n+1}(x_1,\dots,x_n,u) \qquad (5)$$

unde $x=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$; $X_i:\Omega\subset R^{n+1}$, $X_i\in C^1(\Omega),\forall\ i=1,2,\dots,n+1$ şi $\sum_{i=1}^{n+1}X_i^2(x)\neq 0$, $\forall x\in\Omega$.

Ca şi mai devreme căutăm $u\in C^1(\Omega)$ soluţii. Pentru aceasta procedăm astfel:

a) asociem sistemul caracteristic de forma

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{du}{X_{n+1}}$$

b) determinăm $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ integrale prime funcţional independente.

c) scriem soluţia generală a ecuaţiei (5), în formă implicită:

$$\Phi(\varphi_1(x,n),\dots,\varphi_n(x,n))=0$$

cu $\Phi\in C^1(\Omega_1)$, $\Omega_1\subset R^n$ o funcţie arbitrară.

Probleme rezolvate

1. Pentru sistemul diferenţial dat, să se verifice dacă φ_1 şi φ_2 sunt integrale prime:

$$\begin{cases} x_1'=\dfrac{x_1^2-t}{x_2} \\ x_2'=-x_1 \end{cases} \quad \text{şi} \qquad \begin{aligned} \varphi_1(t,x_1,x_2)&=t^2+2x_1x_2 \\ \varphi_2(t,x_1,x_2)&=x_1^2-tx_2 \end{aligned}$$

Rezolvare: Pentru ca $\varphi(t, x_1, x_2)$ să fie integrală primă (în afara condiţiei de a nu fi funcţie constantă care aici e verificată şi pentru φ_1 şi pentru φ_2) e necesar şi suficient ca

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_\Gamma=0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}\right)_\Gamma=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot x_1'+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot x_2'\right)_\Gamma=0$$ (Γ- curbă integrală pentru sistem).

Pentru φ_1 avem: $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\left(\cdot\dfrac{x_1^2-t}{x_2}\right)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot(-x_2)=0$

$$\Leftrightarrow 2t+2x_2\cdot\frac{x_1^2-t}{x_2}+2x_2\cdot(-x_2)=0 \Leftrightarrow 0=0$$

Deci φ_1 e integrală primă. Analog se verifică că φ_2 nu e integrală primă.

2. Să se determine integrale prime pentru sistemele:

a) $\frac{dt}{x}=\frac{dx}{-t}$; b) $\frac{dx}{x(y^2-z^2)}=\frac{dy}{-y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

Rezolvare: a) $\frac{dt}{x}=\frac{dx}{-t} \Leftrightarrow -t\cdot dt = x\cdot dx$

Prin integrare avem: $-\frac{t^2}{2}=\frac{x^2}{2}+c_1$ sau $x^2+t^2=c$

Atunci $\varphi(t, x)=x^2+t^2$ e o integrală primă.

b) $\frac{dx}{x(y^2-z^2)}=\frac{dy}{-y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}=\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{0}=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0}$.

Amplificăm cu 2x, 2y şi respectiv 2z, şi însumând obţinem $d(x^2+y^2+z^2)=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=c_1$ iar $\varphi_1(x, y, z)= x^2+y^2+z^2$ e o integrală primă.

O altă integrală primă obţinem astfel: amplificăm al doilea raport cu z şi al treilea cu y şi le însumăm pe ultimele două. Avem

$$\frac{dx}{x(y^2-z^2)}=\frac{dy}{-y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}=\frac{zdy+ydz}{yz(y^2-z^2)}$$

Considerăm: $\frac{dx}{x(y^2-z^2)}=\frac{d(yz)}{yz(y^2-z^2)}\Leftrightarrow\frac{dx}{x}=\frac{d(yz)}{yz}$. Integrăm şi obţinem

$$\ln|x|=\ln|yz|+\ln|c_2| \Rightarrow \frac{x}{yz}=c_2, c_2\in R.$$

A doua integrală primă este $\varphi_2(x, y, z)=\frac{x}{yz}$.

Ele sunt funcţional independente deoarece rangul matricei

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\end{pmatrix}$$ este 2.

3. Să se rezolve ecuaţiile cu derivate parţiale:

a) $x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=0$; b) $xu^2\frac{\partial u}{\partial x}+yu\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

Rezolvare: a) Este o ecuaţie liniară şi omogenă. Sistemul caracteristic asociat este:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{-z}.$$

Determinăm două integrale prime funcţional independente

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}\Leftrightarrow\int\frac{dx}{x}=-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y} \Leftrightarrow x=\frac{c_1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x\sqrt{y}=c_1.$$

Obţinem $\varphi_1(x, y, z)=x\sqrt{y}$ o integrală primă.

Analog $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{-z}$ implică prin integrare $xz=c_2$ şi $\varphi_2(x, y, z)=xz$ o altă integrală primă funcţional independentă.

Soluţia generată este $u(x, y, z)=\Phi\left(x\sqrt{y}, xz\right), \Phi \in C^1$.

De exemplu luând $\Phi(t_1, t_2)=t_1+t_2$ obţinem soluţia particulară $u=x\sqrt{y}+xz$.

b)Este o ecuaţie cvasiliniară. Scriem sistemul caracteristic asociat $\frac{dx}{xu^2}=\frac{dy}{yu}=\frac{du}{0}$

Din ultimul raport deducem $du=0 \Leftrightarrow u=c_1$, $c_1 \in R$ şi $\varphi_1(x, y, z)=u$ o integrală primă.

Din primele două avem: $\frac{dx}{xu^2}=\frac{dy}{yu} \Leftrightarrow \frac{dx}{xu}=\frac{dy}{y}$.

Înlocuim $u=c_1$ şi obţinem $\frac{dx}{xc_1}=\frac{dy}{y}$. Integrăm şi avem:

$$\frac{1}{c_1}\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{c_1}\ln|x|=\ln|y|+\ln|c_2|, c_1, c_2 \in R^*$$

$$\Rightarrow \frac{x^{\frac{1}{c_1}}}{y}=c_2 \Rightarrow \varphi_2(x, y, z)=\frac{x^{\frac{1}{u}}}{y}$$

φ_2 este o altă integrală primă.

Soluţia generală în formă implicită este: $\Phi\left(u, \frac{x^{\frac{1}{u}}}{y}\right)=0, \Phi \in C^1$.

De exemplu, pentru $\varphi(t_1, t_2)=t_1+\ln t_2$ obţinem soluţia particulară

$$u+\ln\frac{x^{\frac{1}{u}}}{y}=0 \Leftrightarrow u+\frac{1}{u}\ln x-\ln y=0.$$

Probleme propuse

1. Să se verifice dacă pentru sistemele următoare funcţiile considerate sunt integrale prime:

a) $\begin{cases} x'=xy & \varphi_1(t, x, y)=\frac{y^2}{x^2}-2\ln x \\ y'=x^2+y^2 & \varphi_2(t, x, y)=x\ln y+xy \end{cases}$

b) $\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-xy}$, $\varphi_1(x, y, z)=xy+z^2$, $\varphi_2(x, y, z)=\frac{x}{y}$.

2. Să se găsească integrale prime funcţional independente pentru următoarele sisteme de formă simetrică:

a) $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}$ b) $\frac{dx}{y-t}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{t-y}=\frac{dt}{x-z}$

c) $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy+z}$ d) $\frac{dx}{cy-bz}=\frac{dy}{az-cx}=\frac{dz}{bx-ay}$, $(a,b,c)\in R$

e) $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-xy}$.

3.Să se rezolve următoarele ecuaţii cu derivate parţiale:

a) $(x+2y)\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}+2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$

b) $(x-z)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial u}{\partial y}+2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$

c) $(y^2+z^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}-2xy\frac{\partial u}{\partial y}-2xz\frac{\partial u}{\partial z}=0$

d) $8xz\frac{\partial u}{\partial x}+2yz\frac{\partial u}{\partial y}+(4x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial z}=0$

e) $\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$

f) $2x\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=x-y$

g) $(x_2+x_3+x_4)\frac{\partial u}{\partial x_1}+(x_3+x_4+x_1)\frac{\partial u}{\partial x_2}+(x_4+x_1+x_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}++(x_4+x_1+x_2)\frac{\partial u}{\partial x_4}=0$

h) $(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2xy\frac{\partial u}{\partial y}=-u^2$

i) $xy\frac{\partial u}{\partial x}+(x-2u)\frac{\partial u}{\partial y}=uy$

j) $(u-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=x+y$

k) $(u-y)^2\frac{\partial u}{\partial x}+xu\frac{\partial u}{\partial y}=xy$

l) $(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z.$

Bibliografie

1. V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. Junimea, 1985.
2. A. Eckstein, D. Hărăguș, *Exerciții standard de ecuații cu derivate parțiale*, Tip. Univ. de Vest din Timișoara, 2000.
3. G. Moț, C. L. Mihiț, *Note de curs și seminar-Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale,* Arad, 2022.
4. G. Moţ, A. Petruşel, *Matematici speciale pentru ingineri şi economişti*, Ed. Mirton Timişoara, 1999.
5. G. Moţ, A. Petruşel, *Matematici superioare pentru ingineri şi economişti*, Ed. Mirton Timişoara, 1999.
6. G. Moţ, L. Popa, *Ecuaţii diferenţiale. Culegere de probleme*. Ed. Mirton, 1999.
7. R. Precup, *Ecuații cu derivate parțiale*, Ed. Transilvania Press, Cluj, 1997.
8. M. Reghiș, P. Topuzu, *Ecuații diferențiale ordinare*, Ed. Mirton, Timișoara, 2000.
9. I.A. Rus, P. Pavel, G. Micula, *Probleme de ecuații diferențiale și cu derivate parțiale*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982.
10. C. Stoica, *Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale prin exerciții și probleme*, Ediția a II-a revăzută și completată, Ed. Mirton, Timișoara, 2004.